

熊本学園大学 機関リポジトリ

1命中1破壊ゲームの解析（国際経済学科開設20周年記念号）

著者	中敷領 孝能
雑誌名	熊本学園大学経済論集
巻	17
号	1・2
ページ	73-99
発行年	2011-03-18
URL	http://id.nii.ac.jp/1113/00000627/

1 命中 1 破壊ゲームの解析

中敷領 孝能

要 旨

東郷平八郎提督は、日露戦争時の連合艦隊の解散において「百発百中の一砲、能く百発一中の敵砲百門に対抗し得る」と語ったとされる。本論ではこのメッセージを簡単な場合から一般的な場合まで検討する。簡単な場合はほとんど自明であるが、複雑な場合の分析は厳密には吸収マルコフ過程とその遷移確率を導入しなければならない。この問題を解くためには、どのように敵の砲を狙うかを決定する必要がある。しかし、東郷の場合には「一命中一破壊」ルールが想定されていたものと見なすことができる。このルールを導入することによって、命中率や砲の数にかかわらず最適な狙い方を決定することができる。それゆえ、マルコフ遷移行列を決定することができる。確かに遷移確率は命中率や双方の砲の数を決めることで多項式として表すことができるが、それは複雑である。そこで多項式の係数を決定するアルゴリズムを導入する。これらの準備の下に、一般的な場合を解析する。

1. 東郷平八郎の訓示

最初に、やや長くなるが入谷敏男の『日本人の集団心理』の一節を引用する。

物量と科学技術の優劣がものをいう近代戦において、とくに時代おくれの精神主義を強調したのは、わが国の戦前の戦法の特徴であったのであり、これは日露戦争当時、日本海海戦で大勝利をおさめた後、東郷平八郎元帥が、連合艦隊の解散式で「武力なるものは、艦船兵器等のみにあらずして、之を活用する無形の実力に在り。百発百中の一砲、能く百発一中の敵砲百門に対抗し得るを覚らば、我等軍人は、主として武力を形而上に求めざるべからず」と訓告を与えたことに端を発するといわれている¹⁾。

1) 入谷敏男『日本人の集団心理』1986, 新潮選書, p. 78。

本稿で論じるのは東郷平八郎の「百発百中の一砲、能く百発一中の敵砲百門に対抗し得る」という部分である。これは「覚」るべきことであるとされているわけだ。

この東郷の発言がどのように受け止められたかを研究するような能力も時間もないが、入谷は次のように続けている。

とくに太平洋戦争において最も指導的な立場にあった東条首相が、この精神戦思想の持主であり、ある航空隊の訓練所を訪れた時、訓練中の航空兵に、「敵機は何でおとすか」と質問を發し、一人の航空兵が「弾丸でおとします」と答えたところ、「答えになっておらん、精神でおとすんだ」と言った有名な話があるが、これが後に米軍の本土襲撃が盛んに行われるようになった時、航空部隊で結成された特攻隊の思想にもつながっていったのである²⁾。

また、東郷は日露戦の後に軍令部長、さらには元帥となっている。したがって、東郷の発言がその時点でかなり問題視された、というわけでもなさそうである³⁾。

以下で、この発言を考えてみることにしよう⁴⁾。

2. 1 門対 n 門の場合⁵⁾

2.1 損害ベースの勝敗決定ルールの場合 (短期戦)

実際のところ、1 つの砲と 100 の砲が向かい合っており (ここからは算用数字で表記する)、1 つの砲の側は 100 % の確率で命中し、100 の砲の側は 1 % の確率で命中するなら、相手に与える「命中弾」の期待値は共に 1 になりそうである (1 つの砲は 1 回の砲撃で 1 発しか弾丸を發射できないことは自明なこととして想定されていると考えてよいだろう)。そして、もし 1 つ命中すればその砲は破壊されるならば、1 回の「交戦」で相手に与えるダメージは同じになると期待されるだろうから、ひょっとすると「対抗し得る」といえるのかもしれない。

しかし、もう少し考えると、1 回の「交戦」で双方とも 1 門の砲を失うとすると、当初 1 門の方 (これが日本を指すことは明らかだ) は戦力を失い、当初 100 門の方は 99 門残るわけであ

2) 同, p. 78

3) ただし、当時も問題視する発言はあったようである。やや後のことになるが、井上成美は海軍大学校教官時代に「百発百中ノ門一門八、百発一中の敵砲百門ニ対抗シ得トノ思想ヲ批判セヨ」との問題を出したという (井上成美伝記刊行会『井上成美』1982, 井上成美伝記刊行会, p. 123)。また、東郷が述べたからといって必ずしも発言内容が彼に帰せられるものでもない。

4) 以下の記述では「砲」と「門」の表記は統一しない。

5) この節はかなり単純な場合を取り上げるので、煩雑だと思われる方は本節をスキップしていただきたい。

1 命中 1 破壊ゲームの解析

る。あらかじめ「戦争は 1 回の砲撃で与える・こうむる損害の多寡で勝敗を決する」というルールが定められているならば、双方 1 門の砲の損失で終わり、確かに「対抗し得る」、つまり、引き分けに終わりそうである（そうでないケースについては次に検討する）。

しかし、これはあくまで「砲撃」での損害の期待値のざっとした推測にしか過ぎない。実際に与えることのできる損害の正確な値を求めてみよう。ここからは、先に東郷の発言で暗に仮定されていたように、1 発当たれば相手を 1 つ撃破できる、と仮定する。この仮定は本論において重要である。

まず、「1 門」の側の与える損害は命中率が 1 であるから常に 1 門である。

次に「100 門」の側だが、相手は 1 門しかないので与えられる損害は多くても 1 門、悪くすると 0 門であり、この 2 つの可能性しかもちろんない。そして、損害が「0 門」、つまり全て外れる、という方の確率は容易に計算することができる。

$$(1 - 1/100)^{100} = 0.366032$$

したがって損害を「1 門」与えることのできる確率は以下になる。

$$1 - (1 - 1/100)^{100} = 0.633968$$

よって、一見するとそう思われるかもしれないこととは異なり、「100 門」の側の与えうる損害の期待値は 1 ではなく 0.63 程度でしかない。つまり、仮に「100 門」の側が命中させることに成功したとしても両者共に与えた損害が 1 門ずつであり、確率 0.63 で「引き分け」になる。そして 0.37 の確率で命中させえないので、その場合「1 門」の側が相手に損害 1 を与えるのに対し、「100 門」の側は損害を与えることができないので、損害の面から「1 門」の側（つまり日本、東郷の発言では 100 門の側は「敵砲」と表現されていたことに注意）の勝利となる。

「対抗し得る」どころか、勝利することのできる確率がかなりあるということになる。

なぜこのような結果になるかといえ、ば、「100 門」の側が仮に 2 発以上命中させたとしても、相手は 1 門しかないので、「無駄撃ち」になるというゲームのルールになっているからである。

少し一般化して、「100 門」「1/100 の命中率」を「 n 門」「 $1/n$ の命中率」にしてみよう。

よく知られているように、次の式が成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$$

したがって $x = -n$ とおくと以下のように評価できる。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 1/n)^{(-1 \times -n)} = e^{-1} = 0.367879$$

この収束はそこそそ早いので、相手が「100 門」ではなくとも、ある程度の砲（命中率は $1/\text{砲の数}$ ）を相手にする 1 門の側が勝つ確率は 37 % ほどであり、悪くしても引き分ける確率が 63 % ありと見積もることができる。

最も「1 門」の側に分が悪いのは、相手が 2 門、命中率 0.5 のときで（いうまでもなく、相手も 1 門のときには引き分けの確率が 1 になる）勝つ確率は 25 % である。

ただ、一方の命中率が 100 % であるのに対し、片方が 1 % であるということは現実的だろうか。そこで、より一般化し、仮に「1 門」の側が「 n 門」の命中率 m/n の砲の側を相手にするならば、次のように勝つ確率を評価することができる（ m は整数である必要はない）。

$$(1 - m/n)^n$$

m が小さければ近似的に次のように評価できるが、あまり近似の精度（収束の速度）はよくない。

$$(1 - m/n)^n = e^{-m}$$

例えば、100 門の 10 % の命中率の相手なら、1 門の側の勝つ厳密確率は 2.65614×10^{-5} であるが、近似計算では 4.53999×10^{-5} になる。

このように「より現実的」な命中率を相手側に想定しても、このルールのもとでは、当たり前だが、「1 門」の方の勝つ確率はどんなに小さくても正であり、負ける確率は 0 である。なお、損害をベースに勝敗を決する限り「1 回の交戦」という条件が決定的なものというわけではなく、2 回以上交戦をしたとしても「1 門」の側が有利であることには変わりがない。ただし、交戦を続けることに意味がない場合が出てくることになるが。

2.2 殲滅戦の場合（長期戦）

前項での議論は、あくまで 1 回の「交戦」で、その損害によって勝敗を決するというルールのもとでの話であった。

しかし、もう少し考えれば、1 回の「交戦」の結果、仮に片方が 0 門の残り兵力、片方が 99 門の残り兵力のときに引き分け、片方が 1 門でもう片方が 99 門のときに 1 門の側の勝利、というルールはどれだけ現実的だろうか。

確かに「総力戦」の本格的な登場は日露戦争の後の第一次世界大戦であるというのが一般的な理解だから、短期決戦というのは日露戦争のときのイメージとしてそれほどの外をしているとはいえないかもしれないが、現実にはその後の展開は長期殲滅戦への道を辿った。第二次世界大戦において、日本の連合艦隊は終戦時（というよりそのずっと前になるが）稼働可能な中

1 命中 1 破壊ゲームの解析

型以上の艦艇をほとんど所有していなかった。燃料面の制約から稼働できなかっただけではなく、多くの艦艇が実際に撃破されていた。つまり、戦争は 1 回の交戦で決まるというイメージからは程遠いものとなっていたのである⁶⁾。

そこで、どちらかが相手を殲滅するまで戦いが終結せず、双方の砲撃が繰り返されるようにルールを変更してみよう。

片方が、自分の砲の数が正であり、もう片方の砲の数が 0 となったとき、前者の勝利 (後者の敗北) とし、双方共に 0 となったときには引き分けとなって「ゲーム」は終了する。双方の砲の数が正であるならば、砲撃が繰り返されるとする。砲撃は双方同時点で、2 回目以降は前回の砲撃の結果 (砲の破壊の有無) の確定後に行う。

引き分けとなるのは、ゲームの終了前の時点で双方の砲の数が同数であり、かつ、その時点での砲撃が全て命中するという条件のとき、かつそのときのみに成立する。もし同数でなければ、砲撃後にどちらかの側の砲の数が必ず正になるから、ゲームがその側の勝利で終わるかゲームが継続する。したがって引き分けにならない。また、同数であったとき、全て命中しなければ、これもまたどちらかの側の砲の数が必ず正になるので同様である。逆に、上記 2 条件が満たされたとき、双方の砲の数が 0 になるから引き分けになる。

この設定で、1 門の側が勝利するためには、99 回の相手の砲撃が 1 発も命中せず、かつ 100 回目の相手側の砲撃が命中しないということが必要になる (相手側は 1 回の砲撃ごとに 1 門ずつ数が減少する)。99 回の相手の砲撃が命中せず、かつ 100 回目の相手側の砲撃が命中したときには、双方 0 門となるので引き分けとなる。それ以外は相手側の勝利となる。

1 門の側が勝利するために具体的には、1 回目の 100 発の弾、2 回目の 99 発の弾、3 回目の 98 発の弾、・・・99 回目の 2 発の弾、100 回目の 1 発の弾全てが命中しないことが必要十分である。したがって 1 門の側が勝利する確率は次のように計算することができる。

$$(1 - 1/100)^{(100 \times 101/2)} = 9.07262 \text{ E} - 23$$

1 門の側が交戦の 1 回目、2 回目、3 回目で生き残る確率が毎回ほぼ $e^{-1} = 0.367879$ なのだから (もっとも、回数が増えるにつれ徐々に確率は増加するが)、100 回の砲撃で相手の弾 (5050 発) 全てが命中しない確率は正に電子顕微鏡的なスケールになる。

引き分ける確率は、当初 100 門の側の砲弾が 99 回の交戦までは全て外れ、最後に命中する

6) ただし局地的な戦闘における繰り返される砲撃と、戦争全般における戦闘の繰り返しは区別する必要がある。

ときなので次のようになる。

$$(1-1/100)^{(100 \times 101/2 - 1)} \times (1/100) = 9.16426 \text{E} - 25$$

これも予想されることだが、命中する確率が小さいので、引き分ける確率は勝つ確率よりもさらに小さい。

前項の「引き分け」が本項の長期戦ルールでは「1 門」の側の敗北となるので「1 門」の側にとってはかなり厳しくなることは明らかである。

勝利する確率は「1 門」の相手の砲の数が n 門であったとき、次のように書くことができる。

$$(1-1/n)^{(n(n+1)/2)}$$

これは、およそ $e^{-(n+3)/2}$ で近似することができる。つまり、相手の砲の数が 1 門増えるごとにおよそ $e^{-1/2} = 0.606531$ の率が勝利する確率にかけられることになる。言い換えるなら、勝利の確率はほぼ指数関数になる。実際のところ、厳密計算で相手が 2 門のとき勝利する確率は 12.5%，5 門のとき 3.5%，10 門のとき 0.3% となる。

長期戦を考えた場合、「百発百中の一砲」はほとんど全く「百発一中の敵砲百門に対抗し得ない」のである。「覚」るべきはむしろ「百発百中の一砲，百発一中の敵砲百門に対抗し得ず」ということである。

もし「対抗し得る」とするならば、勝利の確率が 5 割程度あることを意味するであろう。そこで、引き分けの確率を度外視し、「1 砲」の相手の砲の命中率がどれほどであれば勝利の確率を 50% にすることができるかを検討してみよう。

相手の砲の命中率を p とおくことにして、「1 門」の側の勝利の確率を 0.5 とおくと次式が得られる。

$$(1-p)^{(n(n+1)/2)} = 0.5$$

これを解くと次のようになる。

$$p = 1 - (1/4)^{(1/(n(n+1)))}$$

相手が 100 門の場合、「対抗し得る」ためには相手の命中率が「百発一中」（1%）ではなく 0.0137% でなければならない。この 2 つの確率の間には 73 倍もの差異がある。

この差はどう考えればよいのだろうか。

実は「対抗し得る」ための相手側の確率は、東郷が主張していたような $1/n$ ではなく、 $1/n^2$ のオーダーである必要がある。このことは、上記確率を n^2 倍した値が一定値に収束することで確認することができる。相手が n 門だったとき、勝利するためには相手の $n(n+1)/2$ 回の

(つまり n^2 に比例するレベルの) 砲撃が外れなければならない、ということを考えればわかりやすいだろう⁷⁾。

その証明をする。 n が大きいとき、

$$\left(1 - (1/4)^{(1/(n(n+1)))}\right)n^2 \doteq \left(1 - (1/4)^{(1/nn)}\right)n^2$$

であるから、改めて $1/n^2 = x$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ は $x \rightarrow +0$ に置き換えることができる。したがって上式は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} & (1 - (1/4)^x)/x \\ &= ((1/4)^0 - (1/4)^{(0+x)})/x \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} ((1/4)^0 - (1/4)^{(0+x)})/x = -\log(1/4) \doteq 1.386294$$

証明終わり。したがって、 n が一定程度大きければ、「1 砲」が n 砲の相手に対抗し得るための n 砲の側の確率は次のような式で近似することができる。

$$-\log(1/4)/n^2 \doteq 1.386294/n^2$$

そもそもこちらが 100 % の確率で命中する砲を持っているときに、「敵」が 1 % の命中率しかない砲を 100 門も装備するということを想定することがかなり非現実的であろうが、0.0137 % ともなれば全くもってありえないだろう。よく考えてみれば、こちらが (月月火水木金で) 努力して命中率を 100 % にするよう訓練しても、相手側の命中率が (見えないほどのほんのわずかも) 向上すれば敗北してしまうわけである⁸⁾。

これではむしろ訓練が無駄であるといっているようにとられてもおかしくない話になってしまっている。

厳密に「対抗し得る」場合の、すなわち双方の勝利確率が同じになる場合の、「1 門」の敵

7) 殲滅戦において 2 乗則が効いてくるということは知られているようで、類似のことが元東部軍参謀の大橋武夫の一般向けの書籍である『図解 兵法』(1976, ビジネス社)に「戦力自乗の法則」として冒頭 (p. 15) に紹介されている。これは「能力同等の艦が 10 隻と六隻とで対戦すれば六隻の方が負けることは誰にもわかるが、六隻の方が全滅したときに 10 隻の方が何隻残るかは、案外知られていない」「戦力は実力の自乗に比例するという法則があり、 $10^2 - 6^2 = 8^2$ という計算である」というものである。実際、損害の期待値どおりに戦力が減少してゆけばほぼそうなる。ランチェスターの法則としても知られる。

井上成美は、この「 N^2 ノ法則」に基づいて、15 隻対 9 隻よりも 10 隻対 6 隻の方が有利だということを主張したようであるが (前掲著, pp. 125-126, 資 - 86-87), その証明自体に説得力があるとはいえない。後にこの問題を検討する。

8) あえていうならこのモデルにおいて命中率は攻撃力と防御力の相対的な関係で決まる。したがって、相手の命中率を下げるために、こちらの防御力を上げるという方法もある。

の側の命中確率，およびその命中確率が採用された場合の引き分けの確率を計算すると表 1 を得る。

表 1

相手の砲数	$1 - (1/4)^{(1/(n(n+1)))}$	$-\log(1/4)/n^2$	厳密計算	引分確率
2	20.6299 %	34.6574 %	24.5122 %	13.9681 %
3	10.9101 %	15.4033 %	11.8728 %	6.3111 %
4	6.6967 %	8.6643 %	7.0430 %	3.6500 %
5	4.5158 %	5.5452 %	4.6697 %	2.3907 %
10	1.2524 %	1.3863 %	1.2638 %	0.6359 %
20	0.3295 %	0.3466 %	0.3303 %	0.1654 %
50	0.0543 %	0.0555 %	0.0544 %	0.0272 %
100	0.0137 %	0.0139 %	0.0137 %	0.0069 %

相手の砲数が 4 以上あれば，さほど上式による簡易計算と変わらないこと，また引き分けの確率が「敵」の砲の数の増加と共に減少するさまを見て取ることができる。これは，先に述べたように引き分けになる条件がゲームの回数が多いほどシビアになるからに他ならない。確率にさして差がないので，簡易計算を用いたとしても，さほど引き分けの確率の計算に誤差が生じるわけではない。なお，この表は次節においても参照する。

なお，「対抗し得る」ような「敵」の砲の命中率を p であらわすと， n を大きくすると引き分けの確率は $p/2$ に近づく。これは次のように示すことができる。「1 門」の側の勝利の確率は次のようになる。

$$(1-p)^{n(n+1)/2}$$

引き分けの確率は次の式で表される。

$$(1-p)^{(n(n+1)/2-1)}p$$

双方の勝利の確率が等しいという条件で n を大きくすると引き分けの確率は 0 に近づくので，勝利の確率は $1/2$ に近づく。

$$\lim (1-p)^{n(n+1)/2} = 1/2$$

よって次のように引き分けの式を表すことができる。

$$(1-p)^{(n(n+1)/2-1)}p = (1-p)^{n(n+1)/2}p/(1-p)$$

上式の $1-p$ は 1 に近づくから、引き分けの確率は $p/2$ に近づく。

以上から、引き分けの確率を $-\log(1/4)/(n^2)/2=0.693147/(n^2)$ で近似できることがわかる。

2.3 2 節の結論

本節では短期戦と長期戦という 2 つの勝敗を決するルールについて、東郷の発言の妥当性を検討した。結論的には短期戦であれば「一砲」 (= 日本) は「対抗し得る」どころかむしろ有利であり、長期戦であればほとんど全く勝機はない。いずれにせよ東郷の発言を誤りであるといえることができるが、以上の検討からは長期戦がおそらく想定されていなかったであろうことが推測できる。

3. 一般ケースの導入

3.1 一般的な情況

以上は「1 門」の側の命中率が 1 であるということを前提としていた。また、ゲーム参加者の片方はゲームに投入させることのできる砲を 1 門しか所有しないとしていた。あえていえば、常にではないが、さらに n 門の側の命中率を $1/n$ と仮定していた。これは単なるモデルとしても現実味を欠くことは否めない。以下では、A と B という「プレイヤー」がそれぞれ初期段階で 1 以上の砲を持ち (それぞれ砲の数を n, m とする)、砲の命中率は A, B の側でそれぞれ p, q (それぞれ 0 より大きく 1 未満) であるという一般的なモデルを考えることにしよう。1 つの砲につき 1 回の射撃で発射できる弾は 1 つ、1 発でも弾が命中すれば撃破されるという前提は同じである。

短期戦ルールでは、1 回の双方の砲撃によって撃破した砲の多い方が勝者となる。同数の場合は引き分けである。

長期戦ルールでは、いずれかの側の砲の数が 0 になるまで同時に砲撃を繰り返し (前回の射撃結果に基づいて次回の砲の数が決まる)、砲を残した方が勝者となる。同時に双方の砲の数が 0 となった場合が引き分けである。

長期戦ルールにおいて、引き分けとなるのは前節で見たのと同じように、決着の直前において双方の砲の数が同数であり、かつ最後の段階で双方の砲撃が全て成功することが必要だが、さらに、(最後の段階で) 全ての砲がそれぞれ別の相手の砲を狙うことが必要である。

例えば、射撃前に片方が 5 門、もう片方が 4 門といったようにバランスを欠いていれば、射撃後に前者が 1 門以上残ることは明らかなので引き分けにはならないが、仮に両者共に 5 門ず

つであっても、仮に片方の側の 2 門がもう片方の別の 1 つの砲を狙うことになれば、射撃の結果いかにかわらず、もう片方は射撃の結果として 1 門以上は残ることになる。

3.2 吸収マルコフ連鎖

長期戦に対応するモデルを組んでおけば、短期戦の場合も容易に解くことができるので⁹⁾、長期戦に対応したモデルを考えておこう。

A, B の初期の砲の数が n, m であったとき、砲の数の組み合わせられた状態は全部で $(n+1)(m+1)$ ある。A の砲の数が k , B の砲の数が l であるとき、その状態を (k, l) と表記しよう。 $k \neq 0$ かつ $l=0$ のときに A の勝利などとなる。

以下、長期戦の場合を考える。長期戦の場合、 $k=0$ かつ $l=0$ のとき引き分けであり、いずれの勝利でも引き分けでもない場合、ゲームが繰り返される。

p, q いずれも 1 より小さいので、理論的にはこのゲームは永久に繰り返され得る。ただし、その確率は 0 になる。また、ある状態から別の状態に移る確率は p, q , および移る前の状態と移った後の状態にしか依存しない (より正確に言えばそのようにすることができる。もし、例えば指揮官が戦闘の成り行きによって戦術、ここでは狙い方を変化させるような場合にはそうならない。しかし、以下に述べるようにこのゲームのルールではどんな状況でも最適、というべき狙い方がひとつだけあるので、ここでの記述は狙い方が合理的であれば成立する)。よってこれはマルコフ連鎖になる。さらに、A, B いずれかの勝利 (敗北)、引き分けという吸収状態があるのでこのモデルは吸収マルコフ連鎖になる¹⁰⁾。

状態 (k, l) をマルコフ遷移行列の i 行目、または i 列目に次の規則で割り当てることができる。ただし $\text{mod}(x, y)$ で x を y で除した際の剰余をあらわすものとする。

α) $k > 0, l > 0$ のとき $\text{mod}((n-k), n)m + (m-l) + 1$

β) $k > 0, l = 0$ のとき $nm + (n-k) + 1$

γ) $k = 0, l > 0$ のとき $nm + n + (m-l) + 1$

δ) $k = 0, l = 0$ のとき $(n+1)(m+1)$

β, γ, δ が吸収状態で、 β なら A の、 γ なら B の勝利であり、 δ なら引き分けになる。 α なら引き続き砲撃が行われることになる。

9) さらに、長期戦でもなく、1 回の短期戦でもない、交戦の回数が制限された場合の結果などについても結果の確率を求めることができる。

10) 吸収マルコフ連鎖については森村英典、高橋幸雄『マルコフ解析』1979、日科技連出版社など参照。

1 命中 1 破壊ゲームの解析

$n=3, m=2$ の場合で上の規則を採用した場合の行列の番号付けの規則を例示する。1 行目 (1 列目) から 12 (= (3 + 1) (2 + 1)) 行目 (12 列目) まで順に次のようになる。

(3, 2), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 2), (1, 1), (3, 0), (2, 0), (1, 0), (0, 2), (0, 1), (0, 0)

(3, 0) から (1, 0) が A の勝利, (0, 2) および (0, 1) が B の勝利, (0, 0) が引き分けとなる。

3.3 砲の数が 1 対 m の場合

東郷の発言にあったような双方の砲の数が 1 対 m (m は 1 より大きいものとする) の場合を取り上げる。前節と異なるのは「1 砲」の側の命中率のみであり、命中率が 1 であるという制約を外した場合を考えよう。

前節までに見たように、1 対 m という状況は極端ではあるが、時代劇をはじめ映画やテレビドラマではおなじみのものとなっているし、実世界においても、稀ではあるにせよ、いくつかの場面で見ることができるものである。

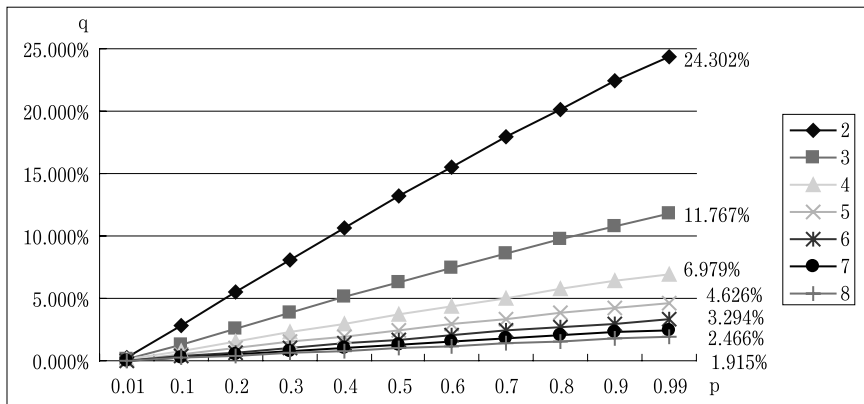
この場合、一般的な n 対 m の場合に生じる狙い方という問題が発生しない。「1」の側は常に「 m 」の側の 1 砲を狙うしかない。また、「 m 」の側は「1」の側の 1 砲しか狙いようがないからである。

前項での附番をやや変更し、1 の砲数の側、 m の砲数の側の勝利のケースそれぞれをひとつにまとめて考えることにしよう。マルコフ行列の末尾の 3 行または 3 列で「1 砲」ないし「 m 砲」のそれぞれの勝利と引き分けの場合を表すことができ、かつ p, q を「1 砲」「 m 砲」の側それぞれの砲の命中率として遷移行列は次のようになる。

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} (1-p)(1-q)^m & p(1-q)^m & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1-(1-q)^m & 0 \\ 0 & (1-p)(1-q)^{(m-1)} & p(1-q)^{(m-1)} & \cdot & 0 & 0 & 1-(1-q)^{(m-1)} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdot & (1-p)(1-q) & p(1-q) & (1-p)q & pq \\ \hline & & 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

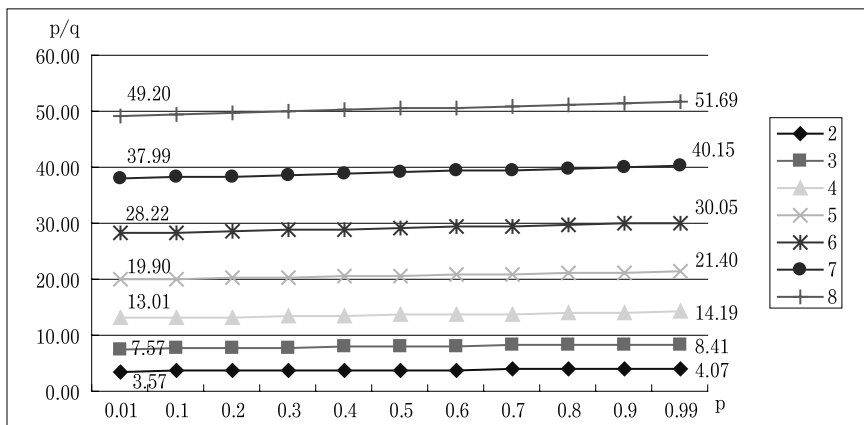
それぞれの m に対して p を与えたとき、双方が引き分けになる q の値をグラフにすると次の図 1 を得る (2.2 項の表 1 を参照のこと)。

図 1



かなりリニアな結果が得られているので、 p/q 、つまり何倍の命中率が必要になるかという図を次に示す (図 2)。

図 2



この解析結果でわかることは、「1 門」の側の確率を 1 から下げていっても、劇的に状況が変わるというわけではないということである。つまり、「対抗し得る」相手側の確率と、「1 門」の側の確率の間の倍率は、 $p=1$ でなくともさほど変化がない。ただし多少、「1 門」の側にとって命中率の倍率の関係はやや有利なといえるだろう。

3.4 どのように狙うか

双方の砲の数が 1 を超えるときは、どのように相手を狙うかという問題が発生する。

この節で取り上げる変数は 3.1 と同様に n, m, p, q とする。

A の側が B の側に初回に与えるダメージを考えてみよう。A の砲の命中率 p が、相手に与えるダメージに関連していることは自明だが、その他のパラメータはどうだろうか。 n もまた「攻撃力」を決定する要素であることはまちがいない。なぜなら、A の側の砲の数が多いほど、潜在的には B の側に与えるダメージを大きくすることができるからである。一方、A から B への攻撃のみを考慮する限り、 q を考慮する必要はない。 q が考慮されなければならないのは、あくまで砲撃が繰り返されるときに、A の残りの砲の数を決定する要因としてのみである。

では m はどうだろうか。これは、A の側の当て方・狙い方による。もし A の側が常に全ての砲で B の 1 門を狙うのであれば、B の砲の数 m は問題にならない (これは前節では当然のことであった)。しかし、通常 m は十分考慮されなければならないパラメータである。

なぜなら、このゲームではある意味で最適といえる狙い方があり、その狙い方においては相手の数が重要であるからである。

その狙い方というのは、「相手に対してできるだけ攻撃力が均等になるように狙う」というものである。もう少し具体的にいえば、「相手の任意の 2 つの砲に対し、こちらが狙う砲の数の差が 1 を超えないように狙う」ということになる。これをまず例をあげて説明してみよう。

こちらが 8 門の砲を有し、相手は 3 門だったとしよう。このとき、8 門にどの相手を狙わせるかということについて、次のような方法がある (相手の攻撃力もしくは防御力は無差別だとしている)。攻撃の振り分け方として、括弧内に振り分ける砲数を示すと、(8,0,0), (7,1,0), (6,2,0), (6,1,1), (5,3,0), (5,2,1), (4,4,0), (4,3,1), (4,2,2), (3,3,2) の 10 通りがある¹¹⁾。次の図 3 は、 α, β, γ という 3 つの砲に 8 門の砲 (o であらわす) を振り分けるイメージである。

図 3

α	$\alpha \beta$	$\alpha \beta$	$\alpha \beta \gamma$	$\alpha \beta$	$\alpha \beta \gamma$	$\alpha \beta$	$\alpha \beta \gamma$	$\alpha \beta \gamma$	$\alpha \beta \gamma$	$\alpha \beta \gamma$
o	$o o$	$o o$	$o o o$	$o o$	$o o o$	$o o$	$o o o$	$o o o$	$o o o$	$o o o$
o	o	$o o$	o	$o o$	$o o$	$o o$	$o o$	$o o o$	$o o o$	$o o o$
o	o	o	o	$o o$	o	$o o$	$o o$	o	o	$o o$
o	o	o	o	o	o	$o o$	o	o		
o	o	o	o	o	o					
o	o	o	o							
o	o									
o										

11) 狙い方の総数については例えば山本幸一『順列・組合せと確率』1983, 岩波書店, pp.112-122 参照。

指揮をする側としては、例えば自陣の攻撃力が低い場合、なるべく確実に相手を撃破できるように攻撃力を集中したくなるかもしれない。しかし、このゲームにおいてそれは適切な方法ではない。なぜなら 1 発でも命中すれば相手は撃破されるので、複数の弾が 1 つの標的に命中するのはある意味無駄撃ちになるからである。

この「相手に対してできるだけ攻撃力が均等になるように狙う」というルールが最適であることを、相手に与える損害の期待値を基準に示すことにしよう。そのためには、仮に 2 つの敵の砲に対し、こちら側が狙う砲の数が 2 以上異なる場合、多い方の砲を少ない方に分配しなおすことでより相手に与える損害の期待値をあげることができることを示せばよい。

問題としている 2 つの相手方の砲以外への砲へ与えるダメージの期待値を D としよう (相手が 3 門以上の砲を持っていたとして；相手の砲の数が 2 門の場合も $D=0$ と考えることができ、1 門の場合には狙い方の問題は発生しない)。また、こちら側の命中率を p 、問題となる相手側の 2 つの砲へのこちらの狙いをつけている砲の数をそれぞれ $i, j, i-j \geq 2, j \geq 0$ とする。

分配前の相手側に与える全ての砲が相手に与える損害の期待値は次の式で与えられる。

$$(1 - (1-p)^i) + (1 - (1-p)^j) + D \quad (3.4.1)$$

再配分した後の全ての砲が相手に与える損害の期待値は次のようになる。

$$(1 - (1-p)^{(i-1)}) + (1 - (1-p)^{(j+1)}) + D \quad (3.4.2)$$

(3.4.2) 式から (3.4.1) 式を引くと次の値を得る。

$$-(1-p)^{(i-1)} - (1-p)^{(j+1)} + (1-p)^i + (1-p)^j$$

$i-j=k \geq 2$ とし、両辺を $(1-p)^j > 0$ で除すと以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & -(1-p)^{(k-1)} + (1-p)^k - (1-p) + 1 \\ &= (1-p)^k - (1-p)^{(k-1)} + p \\ &= (1-p)^{(k-1)}(1-p-1) + p \\ &= p(1 - (1-p)^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

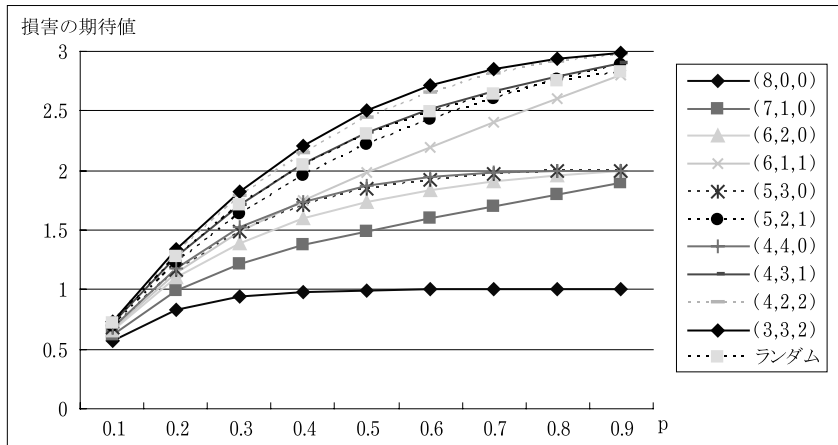
$p=0$ で (3.4.3) は 0、また $k-1 \geq 1$ だから (3.4.3) 式は $p > 0$ で単調増加になる。したがって (3.4.1) の値よりも再配分後の損害の期待値 (3.4.2) の方が大きい。

したがって、相手の砲に割り当てる砲の数を均等にした方が相手に対する損害の期待値を大きくすることができる。上の例でいえば、3 つの砲を (3, 3, 2) と割り当てる場合に、相手に対する損害の期待値をどの命中率においても大きくすることができる (図 4, 「ランダム」につい

1 命中 1 破壊ゲームの解析

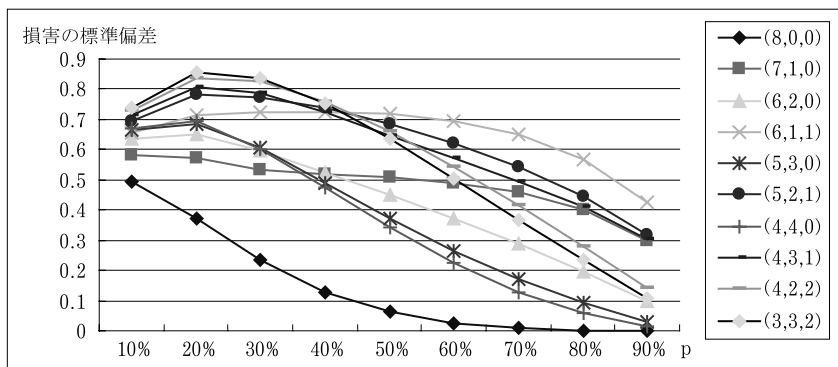
ては後で説明する，また，ランダムと $(4, 3, 1)$ ケースはほとんど区別できない，またグラフは上から順に $(3, 3, 2)$ ， $(4, 2, 2)$ ， $(4, 3, 1)$ となっている)。

図 4



しかしながら，長期戦を考えた場合には，ひとつひとつ確実に相手を撃破することが重要で，期待値のみならず分散 (よって標準偏差) が重要であると考えられるかもしれない。実際，8 対 3 のケースでは相手に与える損害の標準偏差は次のようになる。

図 5



このことから，先に述べたように，とりわけ命中率が低い場合にできるだけ攻撃をひとつの相手に絞り込むことが有利であると考えられるかもしれないが，実際にはそれは得策ではない。「どのように転んでも」攻撃相手をできるだけ分散させた方が有利であることを期待値を使ってではなく，事象のレベルで説明する。

先の期待値における証明同様、2つの狙う相手があったときに、ふりむける砲の数をできるだけ均等にすることで、「どのように転んでも」有利になることでこれを示す。より均等になる前の状況を A、再配分した状況を B とする。A においては、2つの相手の砲に対し狙う砲の数が2つ以上異なるものがあるものとする。これを多い方から少ない方へ狙う相手を1つ移動させた状況が B である。

先と同じように状況 A においてひとつの砲 (α とする) に向けられている砲の数を i 、もうひとつの砲 (β とする) に向けられている砲の数を j ($i-j \geq 2, j \geq 0$) とする。

こちら側に n ($n \geq i+j$) 門の砲があるとき、それぞれの砲の砲撃が命中する、しないに応じて 2^n の結果がある。しかし、2つの相手に向けられている砲以外 ($n-i-j$ 門の砲) はこの証明においては度外視してよい。なぜなら、2つの相手以外に対しては、損害は A、B 共に同じだからである。

すると、問題になる砲が命中する・しないという比較は $2^{(i+j)}$ の場合まで絞り込むことができるが、さらに絞り込むことができる。というのは、 α に向けられた j の砲、 β に向けられた j の砲の命中結果については A の狙い方についても B の狙い方についても変わりがないので、それらの砲が命中するかどうかは結果の差に変更を与えないからである。したがって、問題なのは $i-j=k$ ($k \geq 2$) の砲がどのように命中するかである。

まず、A の狙い方においては、 k の砲のいずれかでも命中すれば相手の砲に1の損害を与え、そうでなければ損害を与えない。また、 k の砲の2つ以上が命中した場合でも相手に与える損害は1となる。

B の狙い方では k の砲のいずれかでも命中すれば相手に与える損害は1以上あるが、もし2つ以上の砲の弾が命中し、かつそれぞれが α と β を狙っていれば、2の損害を与える。

したがって、 k 門の砲撃の命中の結果がどのようなものであっても、必ず B の狙い方、すなわち均等に狙う方が相手に与える損害を同等以上にすることができる。言い換えるなら、命中率がどうあれ問題となる事象の考慮すべき結果は 2^k 個の場合があるが、その全てにおいて、B の狙いの方が同等以上の結果を狙う側にもたらすのである。そして、「相手の任意の2つの砲に対し、こちらが狙う砲の数の差が1を超えないように狙う」ようになるまで、A から B へとといったような攻撃の平準化を行うことができる。

このゲームにおいて、特定の相手に攻撃を集中させることは合理性を欠くことが証明された¹²⁾。

12) したがって、仮に自陣の方が砲の門数で劣るとしても、狙う相手を分散させる必要がある。

1 命中 1 破壊ゲームの解析

3.5 2 門対 2 門の場合

2 門対 2 門の場合というのは、あまり興味を引くものではない。なぜなら、本論では砲の数の差による結果が問題なのだから、2 対 2 を外れれば 2 対 1 か 1 対 1 という、前節および 3.3 で論述した場合になるからであり、また、2 対 2 であれば、双方が「対抗し得る」のは双方の命中率が同一である場合のみであることが自明であるからだ。

しかし、ここで前項で述べた狙い方の問題を例示しておくことにしよう。狙い方によってどれだけの差が生じるかはこの単純なケースでも明らかになる。

A は上で示した最適な狙い方、すなわち 2 対 2 のときに 2 つの砲をそれぞれ相手の 2 つの砲を分散して狙わせる狙い方をし、B は A 側の 1 門を集中して狙うとしよう。このとき、遷移行列の 1 行目は次のように書くことができる。

$$\begin{array}{ccccc}
 (2,2) & (2,1) & (1,2) & (1,1) & \\
 (1-p)^2(1-q)^2 & 2p(1-p)(1-q)^2 & (1-p)^2(1-(1-q)^2) & 2p(1-p)(1-(1-q)^2) & \\
 \\
 (2,0) & (1,0) & (0,2) & (0,1) & (0,0) \\
 p^2(1-q)^2 & p^2(1-(1-q)^2) & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

短期戦および長期戦の結果は、双方の命中率が同じであるという設定のもとに次のようにまとめられる。

表 2

	命中率	1%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	99%
長期戦	分散型勝利確率	49.96%	49.68%	49.63%	50.00%	51.01%	53.02%	56.48%	62.04%	70.50%	82.81%	98.03%
	集中型勝利確率	49.87%	48.42%	46.05%	42.66%	38.03%	32.06%	24.84%	16.79%	8.88%	2.60%	0.03%
	差 (A)	0.09%	1.26%	3.58%	7.34%	12.98%	20.95%	31.64%	45.24%	61.62%	80.21%	98.00%
短期戦	分散型勝利確率	1.95%	15.58%	24.48%	29.58%	33.28%	37.50%	43.68%	52.78%	65.28%	81.18%	98.01%
	集中型勝利確率	1.95%	15.39%	23.04%	24.99%	23.04%	18.75%	13.44%	8.19%	3.84%	0.99%	0.01%
	差 (B)	0.00%	0.19%	1.44%	4.59%	10.24%	18.75%	30.24%	44.59%	61.44%	80.19%	98.00%
	(A) - (B)	0.09%	1.07%	2.14%	2.75%	2.74%	2.20%	1.40%	0.65%	0.18%	0.02%	0.00%

以上に見るように、短期戦ルールを採用しても長期戦ルールにおいても、常に分散型で狙う方が勝率が高くなることが例示される（自明のことだが短期戦ルールでかつ命中率が低い場合には、引き分けの確率がかなり高くなる）。

しかし一方、2 対 2 というのは、長期戦がありうるとしてもかなりシンプルなケースであるから、予想されることとはいえ、戦術の差による勝敗確率の差は、長期戦と短期戦との間でほ

とんどない。命中率が35%をやや下回る場合に(34.795%)長期戦と短期戦の勝率の差が最大になる(2.8217%)が、実際のところほとんど差がないと評しても構わないだろう。本項の設定では戦術の良し悪しのみが競われるだけになるとはいえ、勝敗をはっきりつけたいということ以外に長期戦ルールを採用しなければならない根拠はさほどない。

3.6 ランダムに狙う場合

ここまでの狙い方のルールについての記述は「指揮官」が存在し、かつ指揮官は合理的に配下の砲に対して狙う相手を指示することができ、さらに、配下の砲は指揮官の命令に従うものと暗黙のうちに仮定してきた。

しかし、そうではない場合も考えることができる。

指揮官が指揮できない場合、あるいは指揮の速度が砲撃の間隔に追いつかない場合に、配下(指揮下)の砲が適当に相手を狙って砲撃するということは充分考えられることである。

指揮官が指揮できないなど、ばらばらに狙う場合と、指揮官が存在し完全な分散型で狙う場合は必ずしも一致しない。当然ながら指揮官が合理的に判断し、指揮する方が相手に与えるダメージを大きくすることができる。これは、先に見た8門対3門のケースを例にして確認することができる。狙い方は10通り存在したが、仮にランダムに狙うとすると、それぞれの狙い方になる確率は次の表で与えられる。

表 3

(8,0,0)	(7,1,0)	(6,2,0)	(6,1,1)	(5,3,0)	(5,2,1)	(4,4,0)	(4,3,1)	(4,2,2)	(3,3,2)
0.05%	0.73%	2.56%	2.56%	5.12%	15.37%	3.20%	25.62%	19.21%	25.62%

また、これによりランダムに狙う場合の相手に与えるダメージの期待値をグラフにすると先の図4のようになる。

指揮官が(4,3,1)の狙い方を指示した場合とほとんど変わらないパフォーマンスである。指揮官が最悪の狙い方を指示したケース(8,0,0)よりはるかにすばらしい成果をあげることが可能であるといえるだろう(ランダムケースは加重平均なので当然ではあるが)。もっとも、指揮官が最も合理的な戦術を指導できた場合よりは劣る(しかし、さほど劣らないと評価できるかもしれない)。

ランダムに狙う場合も、厳密な確率を計算することは可能であるから、マルコフ遷移行列を定めることはできるが、本稿ではここまでにとどめる。

4. 一般ケースの解析

4.1 遷移確率 1

前節まででこのゲームを一定程度定式化した。そこでは「狙い方」によってはこのゲームを吸収マルコフ過程として表すことができることを示した。そして「狙い方」については最も合理的方法がただひとつだけ存在し、それは p や q に依存せず、ただ n および m にのみ依存することを示した。

したがって、指揮官が合理的でさえあれば（「部下」が指揮官の命令に従うということが前提ではあるが）、狙い方がただひとつ決まるので、このゲームを吸収マルコフ過程として表現できるはずである。そして、明示的には以下のように遷移確率を与えることによって、実際、吸収マルコフ過程として表現することができる。

状態 (k, l) から状態 (k', l') に移る確率 $P(k, l, k', l', p, q)$ を考える。

$k=0$ または $l=0$ の場合は吸収状態だから $k=k'$ かつ $l=l'$ のとき $P(k, l, k', l', p, q)=1$ 、それ以外るとき $P(k, l, k', l', p, q)=0$ 。

$k>0$ かつ $l>0$ の場合、遷移確率は A が B に与える攻撃によって状態を (k, l) から B の砲の数を l' にうつす確率と、B が A に与える攻撃によって状態を (k, l) から A の砲の数を k' にうつす確率によって決まる。1 回の砲撃は同時に行われるという仮定なので、A から B、B から A への攻撃結果は独立である。したがって $P(k, l, k', l', p, q)$ を次のようにかきあらわすことができる。

$$P(k, l, k', l', p, q) = P_{(A \rightarrow B)}(k, l, l', p) P_{(B \rightarrow A)}(k, l, k', q)$$

A の側も B の側も合理的であれば、狙い方は同一になるから、 $P_{(A \rightarrow B)}(k, l, l', p)$ 、すなわち A が B に与える砲撃の結果の確率のみを考察すれば、遷移確率を確定することができる。

3.4 で狙い方を確定した。明示的に書くと、 $\text{mod}(k, l)$ の相手の砲に対しそれぞれ自陣の $\text{int}(k/l)+1$ の砲を狙わせ、 $l-\text{mod}(k, l)$ の相手の砲に対し自陣の $\text{int}(k/l)$ の砲をそれぞれ狙わせるということになる。ここで int は、括弧内の数を超えない最大の整数をあらわすものとする。

$\text{mod}(k, l)(\text{int}(k/l)+1) + (l-\text{mod}(k, l))\text{int}(k/l) = k$ であることは容易に確かめられるだろう。

$\text{mod}(k, l)=0$ のときには極めてシンプルな形になる。そうなるのは、 $l=1$ または k が l の倍数のときである。前者の場合は A の側の全ての砲が B の 1 門に向けられるときである。後

者の場合 (前者の場合もこれに含まれるが), $k=lt$ ($t \geq 1$, t は整数) とおくと, B のある 1 門が撃破される確率を次のように書くことができる。これを本項では P とおくことにする。

$$P=1-(1-p)^t$$

p が大きいほど, t が大きいほど撃破確率 P は大きくなる。

そして, u 門の B の砲が撃破される確率が ${}_lC_u P^u (1-P)^{(l-u)}$ であらわされることは明白であろう。ここで ${}_xC_y$ は x 個のなかから y 個を選び出す組み合わせの数とする。

また, $l=1$ のとき, 相手が 1 撃破される確率は $1-(1-p)^k$, $k \leq l$ のとき相手を u 撃破する確率が $0 \leq u \leq k$ のとき ${}_kC_u p^u (1-p)^{(k-u)}$, $u > k$ のとき 0 であることも自明であろう。

4.2 遷移確率 2

前項で見たように, いくつかの場合の遷移確率は容易に求めることができる。しかし一般には, このモデルの遷移確率を扱いやすい形に表すことは難しい。

改めて, 次のように変数を定めよう。

$$\text{mod}(k, l) = s$$

$$l - \text{mod}(k, l) = t$$

$$\text{int}(k/l) = w$$

$$P=1-(1-p)^{(w+1)}, Q=(1-p)^{(w+1)}$$

$$P=1-(1-p)^w, Q'=(1-p)^w$$

次のような式を考える。

$$1 = (P+Q)^s (P'+Q')^t \quad (4.2.1)$$

右辺を展開し, 展開した式において Q および Q' を定数と見なし, P および P' の多項式としたときの u 次の項が, 相手に対し u ($0 \leq u \leq (s+t)$) のダメージを B に与える確率となる。このことは s を 0 とおいた場合 ($\text{mod}(k, l) = 0$, 前項で取り上げた) を考えればわかりやすいだろう。

定数項, すなわち $u=0$ で A が B になんらのダメージも与えない確率が $Q^s Q'^t = (1-p)^{((w+1)s+wt)} = (1-p)^k$ であることもすぐにわかる。

しかし, (4.2.1) 式の展開は書き下すことはできるものの, 一般にはそれほどシンプルなものとはいえない。 u 次の式は以下ようになる。

$$\sum_{i=\max(0, u-s)}^{\min(u, t)} P^{(u-i)} P'^i Q^{(s-u+i)} Q'^{(t-i)} {}_sC_{(u-i)t} C_i \quad (4.2.2)$$

展開すれば p の k 次式になることは明らかなので、遷移確率を求めることがほとんど不可能というほど困難であるということはないが、そもそも P や Q 、あるいは P' や Q' が p の多項式であることから、問題の多項式全体の係数を (4.2.2) から直接求めることは煩雑である。

4.3 係数の導出

そこで (4.2.2) を直接解くのではなく、アルゴリズムで遷移確率を求めることにする。

厳密な引き分けのときの確率を数値計算で求めるためには、確率そのものというより、確率を求めるための多項式の係数、またはそれに準じるもの（容易に係数に変換できる数値）が求められている方が都合がよい。

そこで (k, l) の情況から l' に変化する際の、命中数 (0 個から k 個まで) を示す配列を作成する。この配列は従って k, l, l' 、命中数の 4 次元配列となる。 n と m (A, B それぞれの当初の砲の数) が違う情況で配列を作ってもよいが、コンピュータに作成させる場合はわざわざ違う状況を作っても意味がないので $n=m$ としてある程度大きい n について作成しておくといだろう。その場合、 $(n+1) \times (n+1) \times (n+1) \times (n+1)$ の大きさの配列となる。

おおよその流れとしては、次のようになる。0 からの 2^n 個の整数で当たる・当たらない情況を n の砲について発生させる。2 で除し、0 と 1 の n 個からなるベクトルを作成することによって当該整数の「当たり情況」を導くことができる。配列の初期値は全て 0 としておく。

このとき、ベクトルの要素の和を当たった砲の数 (x とする) とすることができる。

$k \leq l$ のときは、 x がそのまま B に与えた損害になる。したがって、 $l' = l - x$ である。

$k > l$ のときは、前節で述べたような狙い方をするから先の n の長さのベクトルを l ずつ分割する。 $\text{mod}(k, l) = 0$ でないときには「余り」のベクトルができるが、適当に「1」を補って長さ l のベクトルにしておく。これで $\text{int}(l/k) + 1$ 個の長さ l のベクトルができるが、全てのベクトルの同じ位置にある要素をかけたベクトルを作成すると、その要素の和が B の新たな生存数 l' となる。ある当たり情況をあらわす整数によって k, l を固定したとき、配列の l' と x の要素をひとつ指定することができ、そのときにひとつ当該配列の要素の値を増加させる。

こうして作成した配列のある (k, l, l', i) の要素の値が j であるとは (配列の定め方によるが)、情況 (k, l) から B の情況が l' になるとき、A 側の i の命中が j あるとすることができる。このとき $k-i$ は外れている。したがって、その確率を $jp^i(1-p)^{(k-i)}$ で求めることができることになる。よって、 (k, l) の情況で B 側の砲の数を l' にする確率は $jp^i(1-p)^{(k-i)}$ を i について 0 から n まで合計したもので与えられる (j の値は一定ではない)¹³⁾。

13) 本論作成に当たって配列は R によって作成した。どんなプログラム環境にあっても配列は極めて容

4.4 一般の場合の短期戦ケース

遷移行列を作成することができるということは、例えば AB それぞれの門数や命中確率が与えられたときに、双方の最終的な勝敗確率だけではなく、例えば短期戦の場合の損害情況、長期戦の場合に片方が何門残して勝利するか、戦闘が何回繰り返されるのかといった問題にも解答を得ることができることを意味する。しかし、本項と次項では、「対抗し得る」場合、すなわち双方の勝利確率が等しくなる場合で、劣勢な側の命中率を与えた場合のもう一方の命中率がいかに与えられるかということなどに絞って論述する。

短期戦ケースでは、1回の交戦の損害で勝敗を決めるのであった。したがって、 np 、 mq が「攻撃力」のようなものと考えられ、それが等しいときに双方の勝敗確率が等しくなりそうである。実際に大体そうであると言えるが、このゲームでは、 $np = mq$ を満たす命中率の場合、砲の少ない側の方がやや有利になる。言い換えれば、「対抗し得る」ために少数側に求められる命中率のプレミアムがやや少ないのである。なぜそうなるかという、狙い方を導入したので、前に見たように1命中1損害のもとでは多数側に無駄撃ちが生じるからである。しかも、大きいプレミアムが要求されるのは低い命中率のときで、高い命中率になるとほとんどプレミアムがない(1倍近くで済む)。これも、多数側の砲が攻撃しても、最大与えうる損害が少数の砲の数に限られるためである。したがって引き分けの確率も命中率の高い場合と低い場合でそれぞれ高くなる。

以下に8対7と8対6のケースを例示しておく。

表 4

8 対 7 8/7=1.143	7の側の命中確率 p	5%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	95%
	8の側の命中確率 q	4.39%	8.83%	17.87%	27.15%	36.67%	46.46%	56.53%	66.89%	77.57%	88.59%	94.24%
	引き分け確率	55.56%	38.34%	26.95%	23.17%	21.57%	21.12%	21.58%	23.18%	26.96%	38.35%	55.56%
	少数側確率倍率 p/q	1.14	1.13	1.12	1.11	1.09	1.08	1.06	1.05	1.03	1.02	1.01
8 対 6 8/6=1.333	6の側の命中確率	5%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	95%
	8の側の命中確率 q	3.78%	7.62%	15.56%	23.88%	32.64%	41.90%	51.74%	62.28%	73.67%	86.10%	92.81%
	引き分け確率	59.52%	41.82%	29.21%	25.07%	23.35%	22.89%	23.42%	25.19%	29.36%	41.88%	59.53%
	少数側確率倍率	1.32	1.31	1.29	1.26	1.23	1.19	1.16	1.12	1.09	1.05	1.02

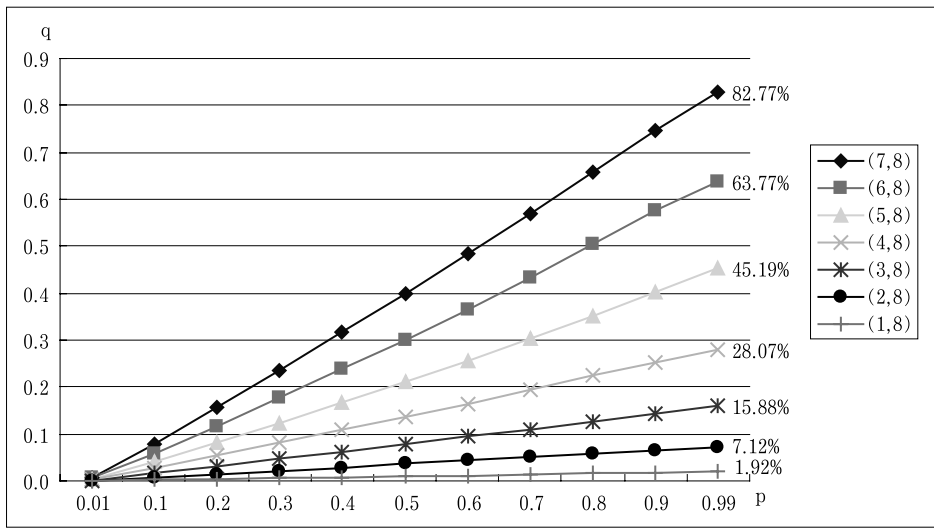
易に作成可能だと思うが、上述のような説明では煩雑であると思う。コードをご希望の方は著者までご連絡いただきたい。

1 命中 1 破壊ゲームの解析

4.5 一般の場合の長期戦ケース

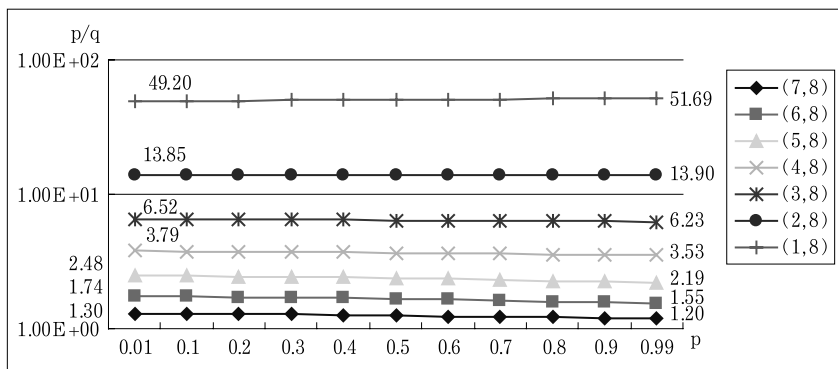
長期戦を分析しよう。B 側が 8 門あるとき，A がそれより少ない砲ではじめるという情況で計算する。縦軸は「対抗し得る」場合の多数側 (B) の命中確率である。

図 6



今までと同じように， p/q を求めよう。縦軸は対数目盛りとなっている。

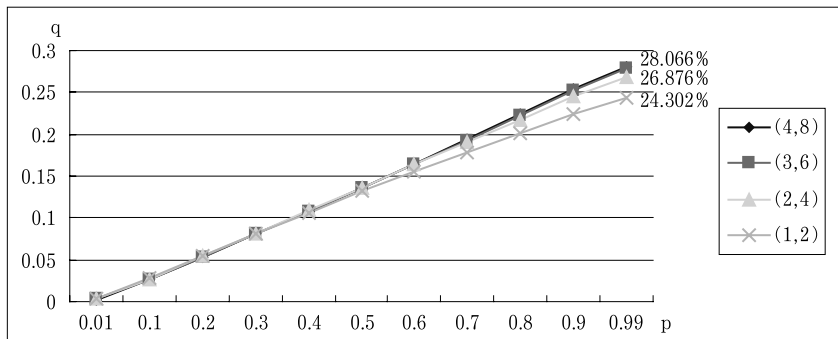
図 7



p/q は，複雑な動きをしているものの p に関してさして変動はない。一定程度は定数のように扱うことも可能かもしれない。

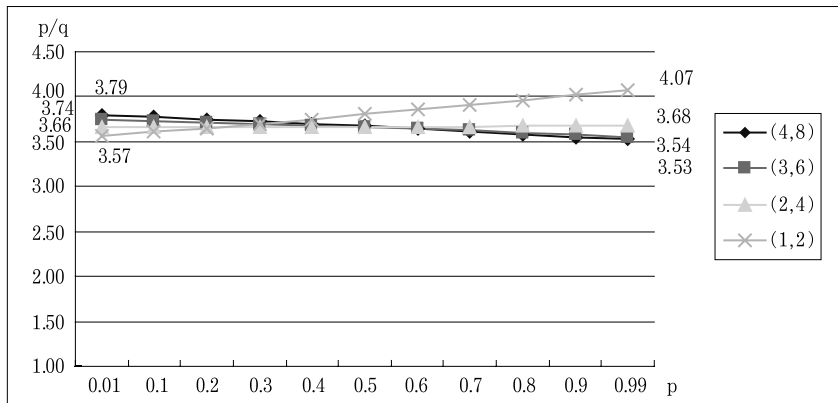
$n/m=0.5$ の場合を取り上げよう。(4, 8) と (3, 6) はほとんど差がない。右上の数値は (4, 8) の場合のものである。

図 8



同様に倍率 p/q を計算してみよう。右の数値は上から順に (1,2), (2,4), (3,6), (4,8) のものであり、左はその逆である¹⁴⁾。

図 9



このことから、 p/q に確率によるそれほど大きな差はないものの、単純に n/m が一定だったときに勝敗のゆくえはその比率だけで決まるものではない、つまり n や m の絶対値にも依存することがわかる。また、あくまで本論の設定のもとではあるが、2.2 への注で取り上げた井上成美の、同じ比率ならば (艦の) 絶対数が少ない方が多少有利であるという主張は、常に成立するものではないことがわかる。

また、(1,2) という、多数側に確実に無駄撃ちがない場合 ($n=1$) を除くと、図 7 も含め全

14) $n=2, 3, 4$ の場合、グラフはほぼ $p=0.5$ で交差する。

ての確率比は m^2/n^2 を下回る¹⁵⁾。

4.6 長期戦ケースと「 N^2 法則」

マルコフ遷移行列を求める方法を与えているので、ある状態 (n, m, p, q) からスタートし、ある特定の吸収状態にいたる確率を求めることができる。したがって、双方の勝利、あるいは引き分けの確率だけではなく、片方が勝利した場合の残存砲のそれぞれの門数に応じた確率を求めることもできる。

A, B 双方の命中率を同じとしてまずまずの打撃力だと思われる 0.25 とした場合の勝利確率を求めよう。以下の表は、左側の門数と、上の門数ではじめた長期戦で左の門数で表される側が勝つ確率である。

表 5

	8	7	6	5	4	3	2	1
8	49.466 %	68.652 %	84.967 %	95.027 %	99.041 %	99.916 %	99.998 %	9.9999999 E-01
7	30.328 %	49.376 %	69.902 %	86.895 %	96.439 %	99.526 %	99.982 %	9.9999969 E-01
6	14.311 %	28.915 %	49.253 %	71.442 %	89.135 %	97.805 %	99.848 %	9.9999176 E-01
5	4.634 %	12.323 %	27.158 %	49.075 %	73.403 %	91.746 %	98.981 %	9.9983948 E-01
4	0.870 %	3.253 %	10.025 %	24.892 %	48.796 %	76.026 %	94.738 %	9.9777586 E-01
3	0.073 %	0.416 %	1.942 %	7.383 %	21.822 %	48.299 %	79.806 %	9.7855488 E-01
2	1.46 E-05	0.015 %	0.127 %	0.854 %	4.449 %	17.366 %	47.173 %	86.100 %
1	6.20 E-09	2.29 E-07	6.18 E-06	0.012 %	0.167 %	1.608 %	10.425 %	42.857 %

左上から右下への主対角線上が開始時の勢力均衡の状況をあらわす。引き分けもありうるので、主対角上の値が 0.5 であったり、主対角をはさむ対称の位置の要素の和が 1 になるということはない。ただし、主対角の要素の値は初期の砲の数が増えるごとに 0.5 に近づく。

当然ながら、劣勢側の勝利確率が 0 ということはない。劣勢側にかなり不利な確率ではあるがこれは究極的にゲームが進行した状況だから、開始後の有限時点ではいまだどちらとも決着がついていない状況もあるわけで、「戦闘開始後しばらくは暴れる」ことも可能なわけである。

2.2 への注で述べたように、「 N^2 法則」というのは優勢側の数が n 、劣勢側が m であったとき、劣勢側は (おそらく) 敗北するが、そのときの優勢側の残り兵力が $\sqrt{n^2 - m^2}$ になるという

15) 図に示されるように (1,2) の場合でも、 p が一定程度低ければ 4 を下回る。

ものである¹⁶⁾。 $n > m$ が仮定されているとはいえ、 $n = m$ のときに「残り兵力」が 0 になることからこの「法則」については厳密なものでないことが予感される。

実際のところ、遷移行列があたえられていれば、勝敗がついた場合の残りの砲の門数ごとの確率を求めることができるので、AB 双方とも命中確率が 0.25 という前と同じ状況で、戦闘終了時の砲の残数の期待値を求めてみよう。以下の表は、左側の門数と、上の門数ではじめた長期戦で、戦闘終了時に残される左の門数で表わされる側に残される砲の数の期待値である。

表 6

	8	7	6	5	4	3	2	1
8	1.843	2.833	3.961	5.065	6.014	6.740	7.305	7.722
7	0.939	1.678	2.643	3.739	4.784	5.625	6.255	6.711
6	0.370	0.804	1.507	2.442	3.499	4.467	5.190	5.694
5	0.100	0.281	0.667	1.326	2.227	3.232	4.082	4.669
4	1.591 E-02	6.142 E-02	0.198	0.526	1.134	1.994	2.928	3.625
3	1.131 E-03	6.527 E-03	3.119 E-02	0.123	0.383	0.927	1.733	2.546
2	1.896 E-05	1.958 E-04	1.652 E-03	1.123 E-02	5.956 E-02	0.240	0.698	1.429
1	6.203 E-09	2.292 E-07	6.182 E-06	1.204 E-04	1.668 E-03	1.608 E-02	0.104	0.429

表の主対角の要素の値は正であり、主対角の右上にある部分の数値も、「 N^2 法則」で計算される値よりは低い。本論の「命中すれば破壊される」という設定に現実性に欠ける部分があるにせよ、「 N^2 法則」は多少なりとも誇張されたものであることが示唆される。また、劣勢側の残存期待値は 0 ではないものの、かなり厳しい値であるといえる。

5. おわりに

私は歴史家ではないから、歴史方面について語る能力を持っていない。したがって平凡な留意点については少し注で述べておく¹⁷⁾。

16) 井上成美伝記刊行会前掲著、資 80, 81。

17) 東郷平八郎の指揮による、日露戦争当初の宣戦布告のない、ロシアの休日における旅順口攻撃での攻撃が「淡泊」なものであったのに対し、彼は日本海海戦で徹底した攻撃を行った。ただし、軍の指揮は指揮官一人に帰せられるものではないことには留意する必要がある。また、東郷は後のロンドン軍縮条約を巡る艦隊派と条約派の対立において艦隊派を代表する立場となった。条約派の一部の考え方は「資源の最適配分」あるいは異なる領域での優位の確保といった思考法に通じるものであろう(外山三郎『大東亜戦争と戦史の教訓』1978, 原書房, 池田清『海軍と日本』1981, 中公新書)。

以上の論述からは、近代的な戦争において劣勢側が短期戦を望むことが考えられるであろう。

一方で現代の世界を見渡すならば、もはや近代戦のような戦争が一般的であるとはいえず、ゲリラ戦・対ゲリラ戦のような継続的な戦争が主流ともなっている¹⁸⁾。これは近代的な「優勢」や「劣勢」といった概念あるいはイメージ/実態が変化したことを示すものであろう。

本項で論述することのできなかった課題は、例えば指揮官の存在しないランダムケースなどいくつかあるが、後日の課題としたい。

Summary

An Analysis of “One Hit, One Destroy” Games

Admiral Togo Heihachiro said “One cannon with 100% hit rate can compete with a hundred cannons with 1% hit rate” at dissolving of Japanese combined fleet on the Russo-Japanese war. In this article we consider this message from simple case to general case. Simple case is almost trivial, but general case can only be solved exactly by introducing absorb Markov chain and its transition probabilities. To solve this problem, we have to decide how to aim at enemy cannons. But at Togo’s case, we can regard that he supposed “One Hit, One Destroy” rule. Introducing this rule, we can decide the optimal way of aim at enemy cannons regardless of hit rates and numbers of cannons. Therefore we can decide Markov transition matrix. Although transition probabilities can be expressed by a polynomial considering the hit rate and the number of cannons of each side, it is complicate. Thus we present an algorithm that can make coefficients of polynomials. After these preparation, we analyze general case.

18) 短期戦が「劣勢側」に有利なルールであるとしたが、ゲリラ戦というのは一定程度、短期戦を頻繁に繰り返すといったものに近い。